Université du 20 août 1955 Skikda
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques — Dr N. BELLAL
$3^{ème}$ année LICENCE — n.bellal@univ-skikda.dz
Module : Introduction à la théorie des opérateurs linéaires. 2016/2017

Série de TD N° 0
1^{er} chapitre préliminaire
Espaces vectoriels normés et espaces de Banach

Exercice 1

1) $E = \mathbb{R}^n$
2) $E = F(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définient sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$.
3) $E = C^n(D, \mathbb{R})$ l'ensemble des fonctions définient sur $D \subset \mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}$ qui sont n fois dérivables et la dérivée d'ordre n est continue.
4) $E = \mathbb{k}[X]$ l'ensemble des polynômes a une indéterminée à coefficient dans $\mathbb{k}$ $(\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou bien $\mathbb{C})$
5) $E = l^p(\mathbb{k})$ l'ensemble des séries de terme général u_n tel que : $\sum_{n \geq 0} |u_n|^p < +\infty$, $1 \leq p < +\infty$.

Quelles sont les opérations internes et externes qu'on peut définir sur E pour que E soit un espace vectoriel?

Exercice 2

Soit $E = C^1([a, b], \mathbb{R})$ espace vectoriel sur le corps $\mathbb{R}$ onconsidère:

1) $E_1 = \{u \in E : \ u(a) = 0\}, \ a, \ b \ \in \mathbb{R}, \ a < b$
2) $E_2 = \{u \in E : \ u(a) = u(b)\}$
3) $E_3 = \left\{u \in E : \ \int_a^b u(x)\, dx = 0\right\}$
4) $E_4 = \{u \in E : \ u(a) = 1, \ u'(b) = 0\}$

Est-ce que les E_i sont des sous-espaces vectoriels de $E, \ i = 1,2,3,4$?

Exercice 3*

I) Soit E un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{k}$. Par définition on dit que E est de dimension infinie s'il n'est pas de dimension finie. C'est –à-dire s'il n'existe pas de système fini de générateurs.

Montrer que les propriétés suivantes sont équivalente:

(1) E est de dimension infinie.

(2) toute famille libre finie de E est incluse strictement dans une autre famille libre.

(3) il existe dans E un système libre dénombrable.

II) Soient $x, y, p, q \in \mathbb{R}_+^*$ tel que : $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et $a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels strictement positifs:

A) Démontrer l'inégalité de Young: $xy \leq (\frac{1}{p})x^p + (\frac{1}{q})y^q$

B) Montrer que : $\sum_{i=1}^{n} a_i^p = \sum_{i=1}^{n} b_i^q = 1 \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq 1$

C) Déduire l'inégalité de Holder: $\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^q\right)^{1/q}$.

D) On suppose que $p > 1$ déduire l'inégalité de Holder l'inégalité de Minkowski:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^p\right)^{1/p} + \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{1/p}.$$

Exercice 4

1) Qu'elle est la dimension du sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_n[X]$ ensembles des polynômes de degrés inférieure ou égale à n.

2) Déduire que la dimension de $\mathbb{R}[X]$ est infinie.

3) Déduire que $E = C^1([-1, 1], \mathbb{R})$ est de dimension infinie .

4) Expliqué pourquoi si E, F sont des espaces vectoriels sur le corps $\mathbb{k}$ alors $E \times F$ l'est aussi sur le même corps. Donner la dimension de l'espace produit $E \times F$ dans le cas de la dimension fini.

Exercice 5

Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels et $N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par

$$N(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i|$$

Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur les a_k pour que N soit une norme sur $\mathbb{R}^n$.

Exercice 6

Pour tout $x = (a, b) \in \mathbb{R}^2$, on définit

$$N(x) = \sqrt{a^2 + 2ab + 5b^2.}$$

Démontrer que N est une norme sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7

Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}$. Pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, on pose

$$\|P\|_A = \sup_{x \in A} |P(x)|.$$

Quelles conditions A doit-elle satisfaire pour que l'on obtienne une norme sur $\mathbb{R}[X]$?

Exercice 8

Soit $E = C([0, 1], \mathbb{R})$. On définit les normes $\|.\|_1$, $\|.\|_2$ et $\|.\|_\infty$ par

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(t)| dt, \ \|f\|_2 = \left(\int_0^1 |f(t)|^2 \right)^{1/2} \text{ et } \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} |f(x)|.$$

Démontrer que ces trois normes ne sont pas équivalentes deux à deux.

Exercice 9

Soit $E = \mathbb{R}[X]$ l' espace vectoriel des polynômes. On définit sur E trois normes par,si $P = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i$:

$$N_1(P) = \sum_{i=0}^{p} |a_i|, \ N_2(P) = \left(\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2 \right)^{1/2}, \ N_\infty(P) = \max_i |a_i|.$$

Vérifier qu'il s'agit de 3 normes sur $\mathbb{R}[X]$. sont-elles équivalentes deux à deux

?

Exercice10

Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. On définit

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_{\infty}, \; N'(f) = \|f\|_{\infty} + \|f'\|_{\infty}$$

1) Démontrer que N et N' sont deux normes sur E.
2) Démontrer que N et N' sont équivalentes.
3) Sont-elles équivalentes à $\|.\|_{\infty}$?

Exercice 11*

Soit $E = C^1([0, 1], \mathbb{R})$. Pour $f \in E$, on pose

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 \left(f'(t)\right)^2 dt\right)^{1/2}.$$

1) Démontrer que N est une norme sur E.
2) Démontrer que, pour tout $f \in E$, $\|f\|_{\infty} \leq \sqrt{2}\, N(f)$.
3) Les deux normes N et $\|.\|_{\infty}$ sont elles équivalentes?

Remarque :

Les exercices * sont laissés aux étudiants.

رياضيات 3 L3 2016/2017

سلسلة اعمال موجهة رقم 0

تمرين 1. نعتبر المجموعات التالية:

1. $E=\mathbb{R}^n$.
2. $E=\mathcal{F}(D\subset\mathbb{R},\mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من D نحو $\mathbb{R}$.
3. $E=\mathcal{C}^n(D\subset\mathbb{R},\mathbb{R})$ مجموعة الدوال المعرفة من D نحو $\mathbb{R}$ و القابلة للاشتقاق n والمشتقة الاخيرة مستمرة $n\in\mathbb{N}$.
4. $E=\mathbb{K}[X]$ مجموعة كثيرات الحدود دات المتغير X.
5. $E=l^p(\mathbb{K})$ مجموعة السلاسل دات الحد العام u_n بحيث $\sum_{n\geq 0}|u_n|^p<+\infty$ و $1\leq p<+\infty$

ماهي العمليات الداخلية والخارجية التي يمكن تعريفها على المجموعات السابقة والتي تسمح بالحصول على بنية فضاء شعاعي.

تمرين 2. لنعتبر الفضاء الشعاعي $E=\mathcal{C}^1([a,\ b]\subset\mathbb{R},\mathbb{R})$ على الحقل $\mathbb{R}$. $a,\ b\in\mathbb{R}\ , a<b$
و نعرف المجموعات التالية:

1. $E_1=\{u\in E,\quad u(a)=0\}$
2. $E_2=\{u\in E,\quad u(a)=u(b)\}$
3. $E_3=\left\{u\in E,\quad \int_a^b u(x)dx=0\right\}$
4. $E_4=\{u\in E,\quad u(a)=0\wedge u'(b)=0\}$

هل هي فضاءات شعاعية جزئية من E.

تمرين 3 (يترك واجب منزلي للطلبة).

1. ليكن E فضاء شعاعي على الحقل $\mathbb{K}$. نقول ان E دو بعد غير منتهي ادا لم يكن دو بعد منتهي. برهن انه:

E دو بعد غير منتهي $\Leftrightarrow$ كل جملة حرة محتواة تماما في جملة حرة اخرى
$\Leftrightarrow$ توجد جملة حرة قابلة للعد في E

2. لتكن $x\ ,y\ ,p\ ,q\in\mathbb{R}_+^*$ بحيث $1/p+1/q=1$ و $a_1,\ldots,a_n,\ b_1,\ldots\ldots,b_n$ اعداد حقيقية موجبة تماما:

(أ) برهن متراجحة يونغ التالية : $xy\leq(1/p)x^p+(1/q)y^q$

(ب) برهن انه

$$\sum_{i=1}^n a_i^p=\sum_{i=1}^n b_i^q=1\Longrightarrow\sum_{i=1}^n a_ib_i\leq 1$$

(ج) استنتج متراجحة هولدر Holder التالية:

$$\sum_{i=1}^n a_ib_i\leq\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}\left(\sum_{i=1}^n b_i^q\right)^{1/q}$$

(د) نفرض ان $p>1$ استنتج من متراجحة هولدر متراجحة مانكوفسكي Minkowski:

$$\left(\sum_{i=1}^n\left(a_i+b_i\right)^p\right)^{1/p}\leq\left(\sum_{i=1}^n a_i^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{i=1}^n b_i^p\right)^{1/p}$$

تمرين 4. 1. ما بعد الفضاء الشعاعي الجزئي $\mathbb{R}_n[X]$ كثيرات الحدود دات درجة اقل او يساوي n

2. استنتج ان $\mathbb{R}[X]$ دو بعد غير منتهي.

3. استنتج ان $E = \mathcal{C}^1([-1\ ,1],\mathbb{R})$ دو بعد غير منتهي.

4. وضح كيف انه ادا كان $E, \quad F$ ف.ش على الحقل $\mathbb{K}$ فان $E \times F$ ف ش على نفس الحقل. اعطي بعد فضاء الجداء في حالة كون الفضائين دو بعد منتهي.

تمرين 5. ليكن: $a_1, ..., a_n$ اعداد حقيقية . وليكن التطبيق

$$\begin{aligned} N : \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x_1, x_2, ..., x_n) &\mapsto N(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i|x_i| \end{aligned}$$

اوجد شرط لازم وكافي حتى يكون N نظيما.

تمرين 6. $N(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy + 5y^2}$ $\quad \forall(x, y) \in \mathbb{R}:$ بين ان N نظيم على $\mathbb{R}^2$

تمرين 7. ليكن A جزء غير خال من $\mathbb{R}$ نضع: $\forall P \in \mathbb{R}[X] : \|P\|_A = \sup_{x\in A} |P(X)|$ ماهو الشرط الدي يجب ان يحققه A حتى يعرف نظيما.

تمرين 8. ليكن $E = \mathcal{C}([0, 1], \ \mathbb{R})$ المزود بالانظمة $\|.\|_1, \ \|.\|_2, \ \|.\|_\infty$. تحقق ان هده الانظمة غير متكافئة باستعمال متتالية الدوال $f_n(x) = x^n$

تمرين 9. ليكن $E = \mathbb{R}[X]$ الفضاء الشعاعي لكثيرات الحدود ونعرف عليه الانظمة التالية:

$$\forall P \in E, \ P(x) = \sum_{i=0}^{p} a_i X^i : \quad N_1(P) = \sum_{i=0}^{p} |a_i|, \quad N_2(P) = (\sum_{i=0}^{p} |a_i|^2)^{1/2}, \quad N_\infty(P) = \max_i |a_i|$$

تحقق انها انظمة ثم هل هي متكافئة مثنى مثنى. $p(x) = \sum_{i=0}^{n} X^i$

تمرين 10. ليكن $E = \mathcal{C}^1[0, 1], \ \mathbb{R})$. نعرف التطبيقين:

$$N(f) = |f(0)| + \|f'\|_\infty, \quad N'(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$$

1. بين ان التطبيقان يعرفان انظمة على E .

2. بين انهما متكافئان.

3. هل هما مكافئان ل $\|.\|_\infty$

تمرين 11 (يترك للطلبة). ليكن $E = \mathcal{C}^1[0, 1], \ \mathbb{R})$. نعرف التطبيقين:

$$N(f) = \left(f^2(0) + \int_0^1 (f'(t))^2 dt \right)^{1/2}$$

1. بين ان التطبيق يعرف نظيم على E .

2. بين انه: $\forall f \in E : \quad \|f\|_\infty \leq \sqrt{2} N(f)$

3. هل النظيمان $N \quad \|.\|_\infty,$ متكافئان

s.pdf maths.bb